6. Доказати тзв. Јакобијев идентитет за комутаторе:

$$[A,[B,C]]+[B,[C,A]]+[C,[A,B]]=0.$$

Решење:

$$[A,[B,C]] = A[B,C]-[B,C]A = A(BC-CB)-(BC-CB)A =$$
$$= ABC-ACB-BCA+CBA \quad \text{---} (1)$$

$$[B,[C,A]] = B[C,A]-[C,A]B = B(CA-AC)-(CA-AC)B$$
$$BCA-BAC-CAB+ACB \quad \text{---} (2)$$

$$[C,[A,B]] = C[A,B]-[A,B]C =$$
$$= C(AB-BA)-(AB-BA)C =$$
$$= CAB-CBA-ABC+BAC \quad \text{---} (3)$$

Задаци:

5.12 Дат је тензор T у матричном облику

$\vec{T_1}=\vec{e_1}$; $\vec{T_2}=\vec{e_2}+\vec{e_3}$; $\vec{T_3}=\vec{e_2}+\vec{e_3}$

$$T=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix} \quad \boxed{S_1=3} \quad \boxed{S_2=0}$$

Решити његов својствени проблем. $T\cdot\vec{X}=\lambda\cdot\vec{X}$.

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix}x_1\\x_2+x_3\\x_2+x_3\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1(1-\lambda)=0\\ x_2(1-\lambda)+x_3=0\\ x_2+x_3(1-\lambda)=0\end{array}\right\} \overset{(*)}{\Rightarrow}$$ овај систем ће имати нетривијално решење ако му је дет. једнака нули, тј.

$$\begin{vmatrix}1-\lambda&0&0\\0&1-\lambda&1\\0&1&1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2-1\right]=0$$

$\lambda_2=1$

$1-\lambda=\pm1$

$1-\lambda=1 \Rightarrow \lambda_1=0$

$1-\lambda=-1 \Rightarrow \lambda_3=2$

$\lambda_1=0,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=2$

За $\lambda_1=0$ систем (*) постаје:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=0\\ x_2+x_3=0\\ x_2+x_3=0\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1=0\\ x_2=-x_3\end{array}$$

тј. $\vec{X}^{(1)}=\begin{pmatrix}0\\x_2\\-x_2\end{pmatrix}=\alpha^{(1)}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$

За $\lambda_2 = 1$, систем ⊛ је: $x_1 \cdot 0 = 0$

$$x_2 \cdot 0 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0,\ \text{тј.}\ \vec{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha^{(2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_2 = 0$

За $\lambda_3 = 2$, систем ⊛ је:

$-x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$$-x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = x_3,\ \text{тј.}\ \vec{X}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha^{(3)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = x_3$

Задаци:

5.14

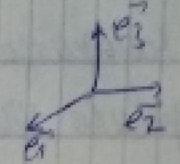
1. Какве векторе придружује тензор $\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ векторима $\vec{T}_1^{\,-1}, \vec{T}_2^{\,-1}, \vec{T}_3^{\,-1}$ реципрочног триједра његових координатних вектора?

Решење:

Из датог облика тензора $\mathcal{T}$ читамо његове коорд. векторе:

$\mathcal{T} = \{\vec{T}_k, \vec{e}_k\}$

$$\vec{T}_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 0\cdot\vec{e}_3$$
$$\vec{T}_2 = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 3\vec{e}_3$$
$$\vec{T}_3 = 0\cdot\vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2 + 2\cdot\vec{e}_3$$



тако да за векторе реципрочног триједра добијамо:

$$\vec{T}_1^{\,-1} = \frac{\vec{T}_2\times\vec{T}_3}{\vec{T}_1\cdot(\vec{T}_2\times\vec{T}_3)} = \frac{(\vec{e}_1+3\vec{e}_2+3\vec{e}_3)\times(2\vec{e}_3)}{\det \mathcal{T}} = \frac{2\vec{e}_1\times\vec{e}_3 + 6\,\vec{e}_2\times\vec{e}_3}{10} = \frac{-2\vec{e}_2+6\vec{e}_1}{10}$$

$$\vec{T}_2^{\,-1} = \frac{\vec{T}_3\times\vec{T}_1}{\det \mathcal{T}} = \frac{2\vec{e}_3\times(2\vec{e}_1+\vec{e}_2)}{10} = \frac{4\vec{e}_3\times\vec{e}_1+2\vec{e}_3\times\vec{e}_2}{10} = \frac{4\vec{e}_2-2\vec{e}_1}{10}$$

$$\vec{T}_3^{\,-1} = \frac{\vec{T}_1\times\vec{T}_2}{\det \mathcal{T}} = \frac{(2\vec{e}_1+\vec{e}_2)\times(\vec{e}_1+3\vec{e}_2+3\vec{e}_3)}{10} = \frac{6\vec{e}_1\times\vec{e}_2+6\vec{e}_1\times\vec{e}_3+\vec{e}_2\times\vec{e}_1+3\vec{e}_2\times\vec{e}_3}{10}$$

$$\vec{T}_3^{\,-1} = \frac{6\vec{e}_3-6\vec{e}_2-\vec{e}_3+3\vec{e}_1}{10} = \frac{3\vec{e}_1-6\vec{e}_2+5\vec{e}_3}{10}$$

На основу једн. (5) имамо:

$$\vec{V}_1 = \mathcal{T}\cdot\vec{T}_1^{\,-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix},$$

па је:

$$\vec{V}_1 = \frac{1}{10}(10\vec{e}_1 - 6\vec{e}_3)$$

Слично $\vec{V}_2 = \frac{1}{10}(10\vec{e}_2 + 12\vec{e}_3)$

$$\vec{V}_3 = \frac{1}{10}(-15\vec{e}_2 - 8\vec{e}_3).$$

5.15

2. Одредити тензор $\mathcal{X}$ на основу једначине $T \cdot \mathcal{X} = \mathcal{U}$, ако је:

а) $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

б) $T = \begin{pmatrix} 3 & 8 & -1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & -11 & 6 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 \\ -7 & -2 & 17 \\ -11 & -6 & 7 \end{pmatrix}$

c) $T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ -7 & 2 & -1 \\ -11 & 6 & -11 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -8 \end{pmatrix}.$

Решење:

а) $\det T = 22 \neq 0 \rightarrow$ тензор T је несингуларан па постоји T^{-1} тако да је:

$$T \cdot \mathcal{X} = \mathcal{U} \,/\, \cdot T^{-1} \Rightarrow T^{-1} \cdot T \cdot \mathcal{X} = T^{-1} \cdot \mathcal{U} \Rightarrow \mathcal{X} = T^{-1} \cdot \mathcal{U}$$

$T^{-1} = ?$ $\quad T^{-1} = \frac{1}{\det T} \cdot \begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}$; $\det T = 22$

Одредимо елементе инверзне матрице тензора $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$.

$A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4$ $\quad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 14$ $\quad A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -8$

$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2$ $\quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4$ $\quad A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 4$

$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5$ $\quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1$ $\quad A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1$

Сада је $T^{-1} = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} -4 & 14 & -8 \\ 2 & 4 & 4 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, па је:

$$X = T^{-1} \cdot U = \frac{1}{22}\begin{pmatrix} -30 & 16 & -34 \\ 4 & 14 & 6 \\ 21 & 13 & 4 \end{pmatrix}.$$

в) T је сингуларан и U је сингуларан $\rightarrow$ X није једнозначно одређен

c) T је сингуларан а $\det U = 2 \neq 0$ $\rightarrow$ решење за тензор X не постоји

5.16 a) $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: својствени вектор је $T \cdot \vec{X} = \lambda \cdot \vec{X}$, $\lambda = ?$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 + x_3 \\ x_2 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} x_1(1-\lambda) + x_3 &= 0 \\ x_2(1-\lambda) &= 0 \\ x_1 + x_3(1-\lambda) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Овај систем се добија директно из система 9

$$\left.\begin{aligned} (T_{11}-\lambda)\cdot x_1 + T_{21}\cdot x_2 + T_{31}\cdot x_3 &= 0 \\ T_{12}\cdot x_1 + (T_{22}-\lambda)\cdot x_2 + T_{32}\cdot x_3 &= 0 \\ T_{13}\cdot x_1 + T_{23}\cdot x_2 + (T_{33}-\lambda)\cdot x_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \begin{aligned} (1-\lambda)x_1 + x_3 &= 0 \\ (1-\lambda)x_2 &= 0 \\ x_1 + (1-\lambda)x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Да би овај систем имао нетривијално решење детерминанта му мора бити 0, тј.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2\right] + 1\cdot\left[-(1-\lambda)\right] = 0$$

$$(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2\right] - (1-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)\left[(1-\lambda)^2 - 1\right] = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 1} \qquad (1-\lambda)^2 = \pm 1$$

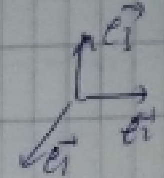
$$1-\lambda_2 = 1 \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 0}$$

$$1-\lambda_3 = -1 \Rightarrow \boxed{\lambda_3 = 2}$$

Показано да ова карактер. једначина одговара $\lambda^3 - S_1\lambda^2 + S_2\lambda - S_3 = 0$
где су S_1, S_2, S_3 скаларне инваријанте датог тензора.

$$\vec{T}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3 \;;\quad \vec{T}_2 = \vec{e}_2 \;;\quad \vec{T}_3 = \vec{e}_1 + \vec{e}_3$$

$$S_1 = \vec{T}_1 \cdot \vec{e}_1 + \vec{T}_2 \cdot \vec{e}_2 + \vec{T}_3 \cdot \vec{e}_3 = 1 + 1 + 1 = 3 \;;\; \boxed{S_1 = 3}$$



$$S_2 = \vec{e}_1 \cdot (\vec{T}_2 \times \vec{T}_3) + \vec{e}_2 \cdot (\vec{T}_3 \times \vec{T}_1) + \vec{e}_3 \cdot (\vec{T}_1 \times \vec{T}_2)$$

$$\vec{T}_2 \times \vec{T}_3 = \cancel{(\vec{e}_1 + \vec{e}_3)}\; \vec{e}_2 \times (\vec{e}_1 + \vec{e}_3) = -\vec{e}_3 + \vec{e}_1$$

$$\vec{T}_3 \times \vec{T}_1 = (\vec{e}_1 + \vec{e}_3) \times (\vec{e}_1 + \vec{e}_3) = -\vec{e}_2 + \vec{e}_2 = 0$$

$$\vec{T}_1 \times \vec{T}_2 = (\vec{e}_1 + \vec{e}_3) \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3 - \vec{e}_1$$

$$S_2 = 1 + 1 = 2 \;;\; \boxed{S_2 = 2}$$

$$S_3 = \vec{T}_1 \cdot (\vec{T}_2 \times \vec{T}_3) = (\vec{e}_1 + \vec{e}_3) \cdot [-\vec{e}_3 + \vec{e}_1] = 1 - 1 = 0 \;;\; \boxed{S_3 = 0}$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = 0 \text{ , тј. } \lambda[\lambda^2 - 3\lambda + 2] = 0$$

$$\lambda[\lambda^2 - \cancel{1}\lambda - 2\lambda + 2] = 0$$

$$\lambda[\lambda(\lambda - 1) - 2(\lambda - 1)] = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 2}$$

Овај облик једн. се може написати као: $(\lambda - 1)[\lambda^2 - 2\lambda] = 0$
што се своди на претходни облик.

Даље, уврстимо $\lambda_1 = 1$ у (*):

$0 \cdot x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$

$x_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow x_2$ било који број

$x_1 + x_3 \cdot 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$$\vec{X}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha^{(1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark$$

За $\lambda_2 = 0$ је (*):

$x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow -x_1 = +x_3$

$x_2 = 0$

$x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = -x_1$

$$\vec{X}^{(2)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ -x_1 \end{pmatrix} = \alpha^{(2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \checkmark$$

За $\lambda_3 = 2$ је (*)

$-x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3 \rightarrow$ било који бројеви

$-x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$

$x_1 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3$

$$\vec{X}^{(3)} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \alpha^{(3)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

(3.17)

4. Може ли се одредити скалар α тако да симетрични тензор има једну својствену вредност једнаку његовој првој скаларној инваријанти? У потврдном случају наћи преостале друге својствене вредности и сва три својствена правца тог тензора.

~~Задатак~~;
$$T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 2 \\ \alpha & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решење:
$$T = \{\vec{T}_k, \vec{e}_k\}; \qquad \begin{aligned} \vec{T}_1 &= \vec{e}_1 + \alpha\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \\ \vec{T}_2 &= \alpha\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 0\vec{e}_3 \\ \vec{T}_3 &= 2\vec{e}_1 - \vec{e}_3 \end{aligned}$$

$$S_1 = \vec{T}_k \cdot \vec{e}_k = \vec{T}_1\cdot\vec{e}_1 + \vec{T}_2\cdot\vec{e}_2 + \vec{T}_3\cdot\vec{e}_3 = 1+3-1 = 3$$

$$S_2 = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\,\vec{e}_i\cdot(\vec{T}_j\times\vec{T}_k) = \vec{e}_1\cdot(\vec{T}_2\times\vec{T}_3) + \vec{e}_2\cdot(\vec{T}_3\times\vec{T}_1) + \vec{e}_3\cdot(\vec{T}_1\times\vec{T}_2) = -(\alpha^2+5)$$

$$S_3 = \vec{T}_1\cdot(\vec{T}_2\times\vec{T}_3) = \alpha^2 - 15$$

Карактеристична једначина је: $\lambda^3 - S_1\lambda^2 + S_2\lambda - S_3 = 0$ добијена из својственог проблема $T\cdot\vec{X} = \lambda\vec{X}$, $\vec{X}$ је вектор својствени, $\lambda \to$ својствена вредност. Једначина својственог проблема је на основу $B_i = T_{ki}A_k$ $(\vec{B} = T\cdot\vec{A})$ еквивалентна следећим скаларним једначинама:

$$T_{ki}X_k = \lambda X_i, \text{ тј. } (T_{ki} - \lambda\delta_{ki})X_k = 0.$$

Експлицитно:

$$(T_{11}-\lambda)x_1 + T_{21}x_2 + T_{31}x_3 = 0$$

$$T_{12}x_1 + (T_{22}-\lambda)x_2 + T_{32}x_3 = 0$$

$$T_{13}x_1 + T_{23}x_2 + (T_{33}-\lambda)x_3 = 0$$

Овај систем има нетривијална рјешења ако му је детерминанта ~~једнака~~ једнака нула.

$$\begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{21} & T_{31} \\ T_{12} & T_{22}-\lambda & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \to$$ помоћу развијања и сређивања ове детерминанте добија се:

↓ Хамилтонова једн.

$\Rightarrow \quad \lambda^3 - S_1\lambda^2 + S_2\lambda - S_3 = 0$, $\quad S_1, S_2, S_3 \to$ скаларне инваријанте тензора T

Облик ове једн. не зависи од избора координатног система у коме смо тензору T придружили матрицу.

У задатку је карактер. једн. облика:

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 - (\alpha^2+5)\lambda - (\alpha^2-15) = 0.$$

Треба видјети да ли ово може имати рјешење $\lambda = 3$. Ово даје $\alpha = 0$. Дакле одговор на питање из задатка је потврдан. Тензор сада има облик:

$$T = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} T_{11} & T_{21} & T_{31} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

и његова карактер. једначина је: $\lambda^3 - 3\lambda^2 - 5\lambda + 15 = 0$

те су сопствене вриједности $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = \sqrt{5}$, $\lambda_3 = -\sqrt{5}$.

Њима одговарају сопствени вектори:

$$\vec{X}^{(1)} = \alpha^{(1)} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{X}^{(2)} = \alpha^{(2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{pmatrix} \qquad \vec{X}^{(3)} = \alpha^{(3)} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-(\sqrt{5}+1)}{2} \end{pmatrix}$$

5.20 За сваки симетрични тензор важи:

$$T^3 = S_1 T^2 - S_2 T + S_3 \cdot E \rightarrow \text{Cayley-Hamiltonova теорема}$$

Ако је T симетрични тензор, он се на основу нормалне форме репрезентације може записати у облику:

$$T = \lambda_1 \{\vec{e_1}', \vec{e_1}'\} + \lambda_2 \{\vec{e_2}', \vec{e_2}'\} + \lambda_3 \{\vec{e_1}', \vec{e_3}'\} \quad \text{-- једн. (5.50)}$$

$\vec{e_1}', \vec{e_2}', \vec{e_3}'$ су орт вектори 3 узајамно нормална својствена правца, а $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ су различите и реалне својствене вриједности.

$$T^3 = S_1 T^2 - S_2 T + S_3 \cdot E \; ; \quad T = \{\vec{T_k}', \vec{e_k}'\} = \lambda_1\{\vec{e_1}', \vec{e_1}'\} + \lambda_2\{\vec{e_2}', \vec{e_2}'\} + \lambda_3\{\vec{e_3}', \vec{e_3}'\}$$

$$\boxed{T = \lambda_k \{\vec{e_k}', \vec{e_k}'\}}$$

$$T^2 = T \cdot T = \lambda_k\{\vec{e_k}', \vec{e_k}'\} \cdot \lambda_l\{\vec{e_l}', \vec{e_l}'\} = \lambda_k \lambda_l (\vec{e_k}' \cdot \vec{e_l}')\{\vec{e_k}', \vec{e_l}'\} \quad \underline{\underline{k=l}}$$

$$T^2 = \lambda_k^2\{\vec{e_k}', \vec{e_k}'\} = \lambda_1^2\{\vec{e_1}', \vec{e_1}'\} + \lambda_2^2\{\vec{e_2}', \vec{e_2}'\} + \lambda_3^2\{\vec{e_3}', \vec{e_3}'\}$$

$$T^3 = T \cdot T^2 = \lambda_m\{\vec{e_m}', \vec{e_m}'\} \cdot \lambda_k^2\{\vec{e_k}', \vec{e_k}'\} = \lambda_k^3\{\vec{e_k}', \vec{e_k}'\}$$

$$\lambda^3 - S_1\lambda^2 + S_2\lambda - S_3 = 0 \Rightarrow \lambda^3 = S_1\lambda^2 - S_2\lambda + S_3$$

$$T^3 = (S_1\lambda_k^2 - S_2\lambda_k + S_3)\{\vec{e_k}', \vec{e_k}'\} = S_1 \underbrace{\lambda_k^2\{\vec{e_k}', \vec{e_k}'\}}_{T^2} - S_2 \underbrace{\lambda_k\{\vec{e_k}', \vec{e_k}'\}} + S_3\{\vec{e_k}', \vec{e_k}'\}$$

$$T^3 = S_1 \cdot T^2 - S_2 \cdot T + S_3 \cdot E \; ✓$$